TỔ HỢP - NHỊ THỨC NIUTƠN

A. Lý thuyết:

I. TỔ HỢP:

1. *Định nghĩa:*

Cho n phần tử khác nhau. Một tổ hợp chập n phần tử là một tập con chứa r phần tử

2. *Số tổ hợp n chập r là*

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-r+1)}{1.2.3....r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

3. *Tính chất:*

a) $C_n^r = C_n^{n-r}$

b) $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

c) $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$

d) $C_n^r = \frac{n-r+1}{r} C_{n-1}^{r-1}$

e) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

II. NHỊ THỨC NIUTƠN

$$(a \pm b)^n = C_n^0 a^n \pm C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + (\pm 1)^n C_n^n b^n \qquad (1)$$

Nhận xét: trong biểu thức ở VP của công thức (1)

- Số hạng tử là n+1.
- Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n

(qui ước $a^0 = b^0 = 1$).

- Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.
- Số hạng tử thứ k+1 la $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

<u>Chú ý</u>:

a = b = 1 ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$

a=1; b= -1 ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n$

B. BÀI TẬP

Dạng 1: Viết khai triển theo công thức nhị thức Newton

Dạng 2: Rút gọn, tính giá trị của biểu thức

Dạng 3: Giải phương trình

Dạng 4: Tìm giá trị của hệ số trong khai triển Newton

Phương pháp:

Ta có : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$

Khi đó:

Hệ số của số hạng tử thứ i là C_n^i

Số hạng tử thứ i là $C_n^i a^{n-i} b^i$

Ta có:

$$\left(x^{\alpha}+x^{\beta}\right)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i\left(x^{\alpha}\right)^{n-i}\left(x^{\beta}\right)^i=\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{\alpha(n-i)+\beta i}$$

Khi đó:

Hệ số của x^k là C_n^i trong đó I là nghiệm của phương trình : $\alpha(n-i)+\beta i=k$

Khi k = 0 đó là số hạng không phụ thuộc vào x

Dạng 5: Sử dụng khai triển Newton chứng minh đẳng thức - bất đẳng thức

BÀI TẬP NHỊ THỨC NIU – TƠN

Dạng 1: Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn

Dạng 2: Rút gọn, tính giá trị biểu thức

Dạng 3: Giải phương trình

Bài 1: a) $(a+2b)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k.(2b)^k.a^{5-k}$

$= C_5^0.(2b)^0.a^5 + C_5^1.(2b)^1.a^4 + \ldots + C_5^5.(2b)^5.a^0$

$= a^5 + 10ba^4 + 40b^2a^3 + 80b^3a^2 + 80b^4a + 32b^5$

Bài 2: Viết 3 số hạng đầ tiên theo lũy thừa tăng dần của x trong khai triển

$(3-2x)^8 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k.(3)^k.(2x)^{8-k}$

Bài 3: Tính

a) S= $C_5^0 + xC_5^1 + x^2C_5^2 + \ldots + x^5C_5^5$

Ta có:

$(1+x)^5 = C_5^0 + xC_5^1 + x^2C_5^2 + \ldots + x^5C_5^5$

$\Rightarrow (1+2)^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \ldots + 2^5C_5^5$

$\Rightarrow 3^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \ldots + 2^5C_5^5$

$\Rightarrow S = 3^5 = 243$

c) **C** = $C_n^0 + \dfrac{C_n^1}{2} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$

$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1x + \ldots + C_n^nx^n\right) dx = \left.\dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Vậy C = $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

d) **D =** $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1}.\, n.\, C_n^n$

$\left((1-x)^n\right)' = \left[C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - C_n^3x^3 + \ldots + (-1)^nC_n^nx^n\right]$

-n $(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2x - 3C_n^3x^2 + \ldots + (-1)^n nC_n^nx^{n-1}$

Chọn n $(1-1)^{n-1}$ = D $\Rightarrow$ D = 0

Bài 4: Rút gọn biểu thức:

A = $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}$

B = $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$

Ta có A + B = $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$

$= (1+1)^n$

$= 2^n$ (1)

và A - B = $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+...+C_{2n}^{2n-1}$ - $\left(C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+...+C_{2n}^{2n}\right)$

$= (1-1)^n$

$= 0$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $A = B = 2^{2n-1}$

Bài 5: Giải phương trình:

$C_x^{x-1}+C_x^{x-2}+...+C_x^{c-9}+C_x^{x-10} = 1023 \ (x \geq 10)$

$\Leftrightarrow C_x^0+C_x^1+C_x^2+...+C_x^9+C_x^{10} = 1024$

$\Leftrightarrow \quad 2^x = 2^{10}$

$\Leftrightarrow \quad x = 10$

Dạng 4: Tìm giá trị của hệ số trong khai triển Niu-tơn

Bài 1: **Tìm số hạng thứ 13 của khai triển** $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$

Ta có số hạng thứ k+1 của khai triển là

$T_{k+1} = C_{15}^{k}.(\sqrt[3]{3})^{15-k}.(\sqrt{2})^k$

Theo giả thuyết $T_{k+1} = T_{13} \Rightarrow$ k+1 = 13 $\Rightarrow$ k = 12

Khi đó $T_{13} = C_{15}^{12}.(\sqrt[3]{3})^3.(\sqrt{2})^{12}$

= 87360.

Vậy T_{13} = 87360

Bài 2: **Tìm số hạng thứ 5 của khai triển** $\left(z-\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^{13}$**, số hạng nào chứa z với mũ số tự nhiên.**

<u>Giải</u>

Ta có số hạng thứ k+1 của khai triển là

$T_{k+1} = C_{13}^{k}.z^{13-k}.(\frac{-1}{\sqrt[3]{z}})^k$

Theo giả thuyết $T_{k+1} = T_5$ k+1 = 5 k = 4

Khi đó $T_5 = C_{13}^{4}.z^9.(\frac{-1}{\sqrt[3]{z}})^4 = 715.\frac{z^8}{\sqrt[3]{z}}$

Vậy $T_5 = 715.\frac{z^8}{\sqrt[3]{z}}$

Mặt khác, ta có: $T_{k+1} = C_{13}^{k}.z^{13-k}.(\frac{-1}{\sqrt[3]{z}})^k$

$= C_{13}^{k}.z^{\frac{39-4k}{3}}.(-1)^k$

Do đó, *z* có số mũ tự nhiên 39 – 4k 3 (0 ≤ k ≤13)

$$\Rightarrow \begin{cases} 4k \vdots 3 \\ 39 > 4k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=3 \\ k=6 \\ k=9 \end{array}\right.$$

+ Với k=0 $T_1 = z^{13}$
+ Với k=3 $T_4 = -C_{13}^3.z^9 = -286\,z^9$
+ Với k=6 $T_7 = C_{13}^6.z^5 = 1716\,z^5$
+ Với k=9 $T_{10} = -C_{13}^9.z^1 = -175\,z$

Vậy các số hạng chứa z với số mũ tự nhiên là
$T_1 = z^{13}$, $T_3 = -286\,z^9$, $T_7 = 1716\,z^5$, $T_{10} = -175\,z$

Bài 3: **Viết lại P(x) =** $(1+x) + 2(1+x)^2 + \ldots + 20(1+x)^{20}$ **dưới dạng**

P(x) = $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{20} x^{20}$. Tìm a_9

<u>Giải</u>

Ta có: **P(x) =** $(1+x) + 2(1+x)^2 + \ldots + 20(1+x)^{20}$

$= (1 + 2C_2^0 + 3C_3^0 + \ldots + 20C_{20}^0) + (1 + 2C_2^1 + 3C_3^1 + \ldots + 20C_{20}^1)x$
$+ (2C_2^2 + 3C_3^2 + \ldots + 20C_{20}^2)x^2 + \ldots + 20C_{20}^{20}x^{20}$

$\Rightarrow$ **a_9 = 9**$C_9^9 + 10C_{10}^9 + \ldots + 20C_{20}^9$

Bài 4: Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{\frac{-28}{15}}\right)^n$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$$

<u>Giải</u> Ta có $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

$\Leftrightarrow \quad 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 79$

$\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 156 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} n=12 \\ n=-13 \end{array}\right. \Rightarrow n = 12$

Số hạng thứ k + 1 là $T_{k+1} = C_8^k.\left(x\sqrt[3]{x}\right)^{n-k}.\left(x^{\frac{-28}{15}}\right)^k = C_n^k.(x)^{\frac{4n}{3}-\frac{16k}{5}}$

Số hạng không phụ thuộc biến

$\Rightarrow \quad \dfrac{4n}{3} - \dfrac{16k}{5} = 0 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow C_{12}^5 = 792$

Bài 6 : Cho biết ba hạng tử đầu tiên của khai triển $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ **có các hệ số là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng. Tìm tất cả các hạng tử hữu tỷ của khai triển trên.**

<u>Giải</u>

Theo công thức nhị thức Niu – Tơn ta có:

Số hạng thứ nhất là : $C_n^0 = 1$.

Số hạng thứ hai là : $C_n^1.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$.

Số hạng thứ ba là : $C_n^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{8}$

Theo đề bài ta có : $1 + \frac{n(n-1)}{8} = n$

$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 8 \end{array}\right.$.

Với n = 8 ta có $T_{k+1} = C_8^k.\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{8-k}.\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{4}}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k.C_8^k.x^{4-\frac{3}{4}k}$.

✶ Xét $x^{4-\frac{3}{4}k}$ để hữu tỷ thì $4 - \frac{3}{4}k < 0 \Leftrightarrow k > \frac{16}{3}$. Do k nguyên dương nên ta chọn k = 6, 7, 8.

k = 6 ta được $T_7 = \left(\frac{1}{2}\right)^6.C_8^6.\left(x^{\frac{-1}{2}}\right) = \frac{7}{16\sqrt{x}}$.

k = 7 ta có $T_8 = \frac{16}{x^3\sqrt[4]{x}}$.

k = 8 ta cũng có $T_9 = \frac{1}{256x^2}$.

✶ Xét $\left(\frac{1}{2}\right)^k.C_8^k$. Ta có :

k = 0	$T_1 = x^4$ (loại)
k = 1	$T_2 = 4x^3\sqrt[4]{x}$ (loại)
k = 2	$T_3 = 7x^2\sqrt{x}$ (loại)
k= 3	$T_4 = 7x\sqrt[4]{x^3}$ (loại)
k = 4	$T_5 = \frac{35}{8}x$ (nhận)
k = 5	$T_6 = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x}$ (nhận)

Vậy trong khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ khi ba số hạng đầu tiên liên tiếp lập thành cấp số cộng thì ta có các hạng tử hữu tỷ là $\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$, $\frac{7}{16\sqrt{x}}$, $\frac{16}{x^3\sqrt[4]{x}}$, $\frac{1}{256x^2}$, $\frac{35}{8}x$, $\frac{7}{4}\sqrt[4]{x}$.

Bài 7 : Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x - 3y)^{200}$.

<u>Giải</u>

Áp dụng công thức nhị thức Niu – Tơn ta có $T_{100} = C_{200}^{99}.2^{101}.(-3)^{99}. = -C_{200}^{99}.2^{99}.3^{101}$.

Bài 8 : Tính hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x+y)^{13}$.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Niu – Tơn ta có : $T_9 = C_{13}^8 = 1287$.

Bài 9 : Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(2-x)^{19}$

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Niu – Tơn ta có :

$$T_{10} = C_{19}^9.2^{10}.(-1)^9 = -C_{19}^9.2^{10} = -94595072.$$

Bài 10 : Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(3-2x)^{15}$.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Niu – Tơn ta có : $T_8 = C_{15}^7.3^8.(-2)^7 = -C_{15}^7.3^8.2^7$.

Bài 11 : Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3+xy)^{15}$.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Niu – Tơn ta có : $T_{k+1} = C_{15}^k.(x^3)^{15-k}.(xy)^k = C_{15}^k.x^{45-2k}.y^k$.

Để tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ thì $\begin{cases} 45-2k=25 \\ k=10 \end{cases}$.

Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3+xy)^{15}$ là $T_{11} = C_{15}^{10} = 3003$.

Bài 12 : Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n$ là 31. Tìm n

Giải

Hạng tử chứa x^{n-2} trong khai triển là hạng tử chứa hệ số thứ ba, nên theo đề bài ta có phương trình : $C_n^2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 31$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 31.32$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 992 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=32 \\ n=-31 \end{array}\right.$$ .ta nhận n = 32.

Vậy hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n$ là 31 thì n = 32.

Bài 13 : Biết hệ số x^2 trong khai triển $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n.

Giải

Theo đề bài ta có phương trình : $C_2^n.(-3)^2 = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-4 \end{array}\right.$$ (loại n = -4)

Vậy hệ số x^2 trong khai triển $(1-3x)^n$ là 90 thì n = 5.

Bài 14 : Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^8$.

Giải

Theo công thức nhị thức Niu – Tơn ta có $T_{k+1}=C_8^k.\left(x^3\right)^{8-k}.\left(-\frac{1}{x}\right)^k=C_8^k.x^{24-4k}$

Để tìm số hạng không chứa x thì $24-2k=0\Leftrightarrow k=6$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^8$ là $C_8^6.(-1)^6=28$.

Dạng 5: Sử dụng khai triển Niu-tơn chứng minh đẳng thức-bất đẳng thức:

Bài 1: Ta có: $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.x^k$

$$=C_n^0.x^0+C_n^1.x+C_n^2.x^2+\ldots+C_n^n.x^n$$

Thay x = 4, ta được:

$$(1+4)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.4^k$$

$$\Leftrightarrow\quad 5^n=C_n^0.4^0+C_n^1.4+C_n^2.4^2+\ldots+C_n^n.4^n \text{ (đpcm !)}$$

Bài 2: Ta có: $(1+x)^n=C_n^0.x^0+C_n^1.x+C_n^2.x^2+\ldots+C_n^n.x^n$

$$\rightarrow\quad (1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n \qquad (1)$$

và $(1-x)^n=C_n^0.x^0-C_n^1.x+C_n^2.x^2-C_n^3.x^3+\ldots+(-1)^n.C_n^n.x^n$

$$\rightarrow\quad (1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^n.C_n^n \qquad (2)$$

Lấy (1) + (2), ta được:

$$2^n=2(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots)$$

$$\rightarrow\quad 2^{n-1}=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots$$

Lấy (1) - (2), ta được:

$$2^n=2(C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots)$$

$$\rightarrow\quad 2^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots$$

Vậy $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=2^{n-1}$

Bài 3:

1) CMR: $C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Giải

Ta có: $\int_0^1(1+x)^n dx=\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Mặt khác: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1.x+C_n^2.x^2+\ldots+C_n^n.x^n$

Lấy tích phân 2 vế ta được:

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1} \text{ (đpcm!)}$$

2) CMR: $C_n^0 - \frac{C_n^1}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

<u>Giải</u>

Ta có: $\int_{-1}^{0} (1+x)^n dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{n+1}$

Mặt khác: $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1.x + C_n^2.x^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n.x^n$

Lấy tích phân 2 vế ta được:

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{(đpcm!)}$$

Bài 4: Với n là số nguyên dương. CMR:

$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n) \le n!$

<u>Giải</u>

Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1.x + C_n^2.x^2 + \ldots + C_n^n.x^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2x^2C_n^2 + \ldots + nx^{n-1}C_n^n$$

Cho $x = 1$, ta được:

$$n(1+1)^{n-1} = C_n^1 + 2.1^2C_n^2 + \ldots + n.1^{n-1}C_n^n$$

$$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n) = 2^{n-1}$$

Mặt khác:

$$2^{n-1} \le 1.2.3\ldots n = n!$$

Vậy $\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n) \le n!$